

# TỐI ƯU HÓA KẾT CẤU CÓ CẤU TRÚC TUẦN HOÀN

TOPOLOGY OPTIMIZATION OF STRUCTURE USING A PERIODIC UNIT CELL

➔ **Ths. Tạ Quốc Việt** - Khoa Kỹ thuật Xây dựng - Trường Đại học Giao thông vận tải - Di động: 0989339908  
- Email: vietq@utc.edu.vn

**Tóm tắt:** Bài báo trình bày mô hình tối ưu hóa hình thái kết cấu được tạo từ các phần tử đặc trưng có dạng tuần hoàn. Mô hình tối ưu sử dụng trong bài báo là phương pháp đẳng hướng với ràng buộc phạt (SIMP). Mô hình được áp dụng trên bài toán 2D dầm giản đơn chịu lực tập trung ở chính giữa. Bốn trường hợp được tiến hành mô phỏng bao gồm một trường hợp không được tối ưu hóa tuần hoàn, ba trường hợp dầm được tối ưu hóa thành bốn ô cơ sở được sắp xếp theo các cách khác nhau. Kết quả cho thấy rằng kết cấu không được tối ưu hóa dạng tuần hoàn cho độ cứng lớn nhất. Việc xoay hướng của các ô cơ sở sẽ đem lại hiệu quả khác nhau về mặt độ cứng.

**Từ khóa:** Tối ưu hóa hình thái, cấu trúc tuần hoàn, đẳng hướng vật rắn với ràng buộc phạt.

**Abstract:** The paper presents a topology optimization model for structures composed of periodically repeated unit cells. The optimization approach employed is the isotropic penalization method (SIMP). The model is applied to a two-dimensional simply supported beam subjected to a concentrated load at midspan. Four simulation cases are considered, including one non-periodic optimization case and three cases in which the beam is optimized using four unit cells arranged in different configurations. The results show that the non-periodic optimized structure achieves the highest stiffness. Additionally, the orientation of the unit cells leads to different stiffness performances.

**Keyword:** Topology optimization, periodic unit cell, SIMP.

## 1. Giới thiệu

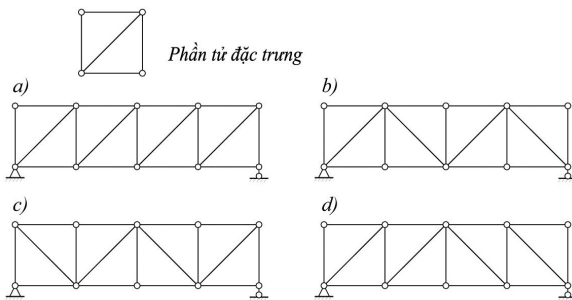
Tối ưu hóa hình thái (Topology Optimization-TO) là một phương pháp thiết kế tối ưu để phân bố vật liệu có hiệu quả nhất trong một miền thiết kế cho trước, với các ràng buộc về điều kiện biên, tải trọng, thể tích của miền thiết kế. Ý tưởng của phương pháp này là loại bỏ các phần vật liệu ít/không tham gia vào chịu lực, từ đó xây dựng được các dạng kết cấu mới có khối lượng nhẹ nhưng vẫn đảm bảo các yêu cầu về độ cứng, về khả năng chịu lực. Do đó, phương pháp này được sử dụng nhiều trong nhiều lĩnh vực như thiết kế kết cấu, các cấu kiện cơ khí (Bendsøe & Sigmund, 2003; Sigmund & Maute, 2013). Bên cạnh khả năng chịu lực, thiết kế tối ưu hóa hình thái còn cho phép tối ưu khả năng truyền nhiệt, tối ưu khả năng chịu tác động của khí động học...

Nhiều thuật toán được sử dụng trong tối ưu hóa hình thái, tuy nhiên, ba phương pháp được sử dụng chính gồm có: phương pháp vật rắn đẳng hướng với ràng buộc phạt (SIMP-Solid isotropic material with penalization) (Bendsøe & Sigmund, 1999; Sigmund, 2001), tối ưu hóa cấu trúc tiến hóa hai chiều (BESO - Bi-directional Evolutionary Structural Optimization) (Huang & Xie, 2007; Huang & Xie, 2010), phương pháp hàm đồng mức (LS-Level set) (van Dijk et al., 2013)...

Mặc dù có nhiều ưu điểm trong thiết kế kết cấu, tuy nhiên, trong nhiều trường hợp, phương pháp này lại đưa ra nhiều dạng cấu kiện có hình dạng phức tạp. Điều này dẫn tới khó khăn trong quá trình chế tạo, lắp ráp, xây dựng các cấu kiện trong thực tế. Điều này làm giảm tốc độ thi công công trình, đặc biệt với các công trình nhà sử dụng các vật liệu đúc sẵn. Để khắc phục nhược điểm này, phương pháp tối ưu hóa cấu trúc có dạng tuần hoàn là một giải pháp phù hợp. Khi sử dụng phương pháp này, kết cấu sẽ được tạo ra từ các phần tử đại diện - unit cell. Nói cách khác, kết cấu được ghép từ các phần tử có dạng hình học giống hệt nhau (Huang & Xie, 2008). Đây là giải pháp đem lại khả năng chịu lực cao, khối lượng nhẹ đồng thời đảm bảo khả năng sản xuất đại trà, giảm thiểu giá thành thi công (Osanov & Guest, 2016; Wu et al., 2021). Bên cạnh đó, cấu trúc tuần hoàn cũng được mở rộng trong thiết kế các cấu kiện đảm bảo khả năng truyền nhiệt (Chen et al., 2010).

Có nhiều cách ghép nối các phần tử đặc trưng: tịnh tiến, đối xứng, xoay... Hình 1 thể hiện một số dạng tổng hợp của các phần tử đặc trưng: Hình 1a, bốn phần tử đặc trưng có dạng tịnh tiến, hình 1b được kết hợp từ tịnh tiến - xoay  $90^\circ$  - tịnh tiến - xoay  $90^\circ$ , hình 1c xoay  $270^\circ$  - tịnh tiến - xoay  $270^\circ$  - tịnh tiến, hình 1d được kết hợp từ tịnh tiến - tịnh tiến - xoay  $90^\circ$  - xoay  $90^\circ$ . Tổ hợp các phần tử đặc

trung làm cho các kết cấu có khả năng chịu lực khác nhau và thẩm mỹ khác nhau. Nhằm giải quyết vấn đề này, bài báo này ứng dụng mô hình tối ưu hóa cấu trúc có dạng tuần hoàn được đề xuất bởi Thomas và các cộng sự (Thomas et al., 2021). Mô hình cho phép lựa chọn số lượng phần tử đặc trưng của kết cấu, hướng xoay của các phần tử, từ đó đưa ra được dạng thiết kế tối ưu của kết cấu. Kết quả thu được trên mỗi mô hình là độ mềm nhỏ nhất, tương đương với độ cứng lớn nhất, là cơ sở để đánh giá dạng kết cấu có khả năng chịu lực tối ưu.



Hình 1. Một số dạng tổ hợp của phần tử đặc trưng

Bố cục bài báo có bố cục như sau: phần 2 giới thiệu cơ sở lý thuyết của phương pháp SIMP và kỹ thuật xây dựng trường lấy trung bình độ nhạy nhằm xác định được dạng phần tử đặc trưng. Ứng dụng của lý thuyết này thể hiện trong phần 3 trên cơ sở mô phỏng tối ưu hóa hình thái của dầm chịu lực tập trung ở chính giữa, được cấu tạo từ 4 phần tử đặc trưng, các phần tử có hướng xoay khác nhau. Các kết luận thu được thể hiện trong phần 4.

## 2. Lý thuyết SIMP

### 2.1 Phương pháp SIMP định mức vật liệu

Trong bài toán tối ưu hóa hình thái chịu tác động của lực, phương pháp SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) được sử dụng khá rộng rãi, do có ưu điểm là biến bài toán thiết kế hình học rời rạc thành bài toán tối ưu hóa tham số liên tục. Trong đó, mỗi phần tử hữu hạn được gán biến mật độ vật liệu  $x_i$  có giá trị liên tục nằm trong khoảng từ 0 (tương đương với lỗ hổng rỗng) đến 1 (tương đương với vật liệu đặc nguyên vẹn). Giá trị của biến mật độ này được nội suy phi tuyến thông qua một hàm số mũ mang tính chất phạt (penalization). Mục đích của hàm phạt là làm sụt giảm độ cứng một cách bất lợi cho các phần tử có tỷ trọng trung gian (ví dụ  $x_i=0.5$ , độ cứng chỉ còn khoảng 12.5% khi dùng hệ số bậc 3), từ đó ép thuật toán tối ưu dần phân cực các biến thiết kế về các trạng thái rời rạc là 0 hoặc 1 ở cuối vòng lặp. Sự phụ thuộc của mô đun đàn hồi (Young's modulus) tại phần tử thứ  $i$  vào tỷ trọng vật liệu được biểu diễn bằng phương trình:

$$E_i(x_i) = E_{min} + x_i^p (E_0 - E_{min}) \quad (1)$$

Trong đó,  $E_0$  là mô đun đàn hồi của vật liệu gốc ở trạng thái hoàn toàn đặc.  $E_{min}$  là một độ cứng vi mô rất nhỏ, để đảm bảo điều kiện ổn định khi phân tích phần tử hữu hạn (FEA).

Giá trị  $E_{min}$  là một độ cứng vi mô rất nhỏ được gán vào các vị trí "lỗ hổng" nhằm rào lỗi xuất hiện ma trận thuận lý hoặc bị kỳ dị trong phân tích phần tử hữu hạn (FEA). Hệ số  $p$  là hệ số phạt (penalty power), thường được thiết lập với giá trị để mang lại hiệu quả phạt vật liệu nhận các giá trị trung gian tốt nhất.

Dựa trên giả định này, thay vì xây dựng ma trận độ cứng trực tiếp, ma trận độ cứng của mỗi phần tử,  $k_i$ , cũng sẽ tỷ lệ tuyến tính với mô đun đàn hồi nội suy:

$$k_i(x_i) = x_i^p k_0 \quad (2)$$

Với  $k_0$  là ma trận độ cứng phần tử cơ bản khi vật liệu hoàn toàn đặc ( $x_i=1$ ), lược bỏ yếu tố vi phân  $E_{min}$  để đơn giản hóa quá trình đạo hàm).

### 2.2 Bài toán tối thiểu hóa độ đàn hồi

Mục tiêu phổ biến nhất trong tối ưu hóa kết cấu chịu tải trọng tĩnh là tối đa hóa độ cứng tổng thể của hệ thống dưới tác dụng của các tải trọng cho trước. Điều này tương đương với việc tối thiểu hóa độ mềm (compliance). Bài toán tối thiểu hóa độ mềm được phát biểu toán học như sau:

Hàm mục tiêu (Objective Function) cần được tối thiểu hóa là tổng năng lượng biến dạng  $C$ , được tính thông qua phân tích phần tử hữu hạn:

$$C(\mathbf{x}) = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \sum_{i=1}^{N_e} x_i^p \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_0 \mathbf{u}_i \quad (3)$$

Trong đó,  $\mathbf{U}$  và  $\mathbf{K}$  lần lượt là véc-tơ chuyển vị tổng thể và ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu. Đại lượng  $\mathbf{u}_i$  là véc-tơ chuyển vị tại các nút của phần tử thứ  $i$  và  $N_e$  là tổng số phần tử chia lưới trong miền thiết kế.

Tuy nhiên, nếu không có ràng buộc khối lượng, thuật toán tối ưu sẽ giữ lại toàn bộ vật liệu để đạt độ cứng cao nhất. Do vậy, cấu trúc cần tuân thủ một giới hạn về thể tích vật liệu cho phép:

$$\sum_{i=1}^{N_e} x_i v_i - V^* \leq 0 \quad (4)$$

Ở đây,  $v_i$  là thể tích của phần tử thứ  $i$  và  $V^*$  là giới hạn thể tích mục tiêu tối đa của vật liệu ở kết quả cuối cùng.

Để giải quyết bài toán tối ưu trên bằng các thuật toán cập nhật gradient như Tiêu chí Tối ưu (Optimality Criteria - OC), ta cần xác định đạo hàm, hay còn gọi là phân tích độ nhạy (sensitivity analysis), của hàm mục tiêu theo từng biến tỷ trọng  $x_i$ :

$$\frac{\partial C}{\partial x_i} = -px_i^{p-1} \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_0 \mathbf{u}_i \quad (5)$$

Việc đo lường giá trị độ nhạy âm này cho ta biết mức độ đóng góp của từng phần tử vào độ cứng của kết cấu. Yếu tố nào có giá trị tuyệt đối của độ nhạy càng lớn chứng tỏ tầm quan trọng của nó trong việc chịu lực và sẽ được thuật toán “ưu tiên” giữ lại. Dữ liệu độ nhạy nguyên bản này sẽ là dữ liệu đầu vào không thể thiếu cho các bài toán ràng buộc tuần hoàn ở mục tiếp theo.

### 2.3. Quy trình phân tích và tối ưu hóa kết cấu tuần hoàn

Khác với thiết kế nguyên khối (monolithic) nơi thuật toán tự do phân bố vật liệu trên toàn bộ dầm, với kết cấu tuần hoàn, mô hình cần được tinh chỉnh để áp đặt ràng buộc hình học nhằm đảm bảo các phần tử đặc trưng (unit cells) trên toàn bộ dầm luôn giống hệt nhau sau mỗi chu kỳ giải bài toán. Quy trình tối ưu hóa một kết cấu tuần hoàn định hướng (oriented periodic topology optimization) được tiến hành theo các vòng lặp như sau:

- Khởi tạo bản mẫu chung (Representative Unit-Cell - RUC): Thay vì tối ưu độc lập toàn bộ dầm, một không gian thiết kế ảo gốc gọi là RUC được thiết lập. Lưới phần tử của RUC có hình học, kích thước hoàn toàn khớp với bất kỳ ô cơ sở thành phần nào trong dầm (ví dụ lưới dầm được chia làm 4). Ở vòng lặp đầu tiên, RUC này thường là một khối vật liệu đặc hoàn toàn.

- RUC này được nhân bản và ghép lại với nhau U lần (ví dụ 4 lần) để kiến tạo lấp đầy cấu trúc dầm 4x1. Trong mô hình tối ưu hóa tuần hoàn định hướng, hệ thống tại bước này được cung cấp thêm một sơ đồ ma trận để phép tịnh tiến có thể xoay hoặc lật khối RUC gốc theo các hướng đã định sẵn.

- Đánh giá tổng thể độ mềm: Thuật toán áp dụng tải trọng tập trung P và các điều kiện gối tựa lên toàn bộ cấu trúc dầm 4x1 vừa được ghép lại để giải bài toán Phần tử hữu hạn (FEA). Trình tự này tính toán giá trị độ mềm của cả dầm (Compliance), đồng thời quét độ nhạy (sensitivity) định giá phần tử chịu lực lớn hay nhỏ theo phương trình (5) trên trải dài toàn bộ hệ.

- Phân hồi, chiếu trung bình hóa độ nhạy (Mapping): Thay vì sử dụng riêng biệt dữ liệu độ nhạy của phần nào để loại bỏ phần này trên thiết kế tổng thể, mọi phần tử trên dầm sẽ được gom lại, chia độ nhạy thành nhiều bộ tương ứng với 4 ô rồi tính trung bình cộng để dồn về lại cho bản RUC gốc theo thuật toán:

$$\bar{\alpha}_j = \frac{1}{U} \sum_{u=1}^U \alpha_{ju} \quad (6)$$

Trong đó  $U = 4$  là tổng số ô tuần hoàn, và  $\alpha_{ju}$

là độ nhạy phần tử thứ j thuộc ô cơ sở u trên dầm thực. Nếu trong một sơ đồ tuần hoàn có xuất hiện ô xoay góc chéo, thuật toán nội suy ánh xạ vị trí phần tử tương ứng  $\alpha_{ju}$  thông qua các ma trận chuyển đổi tọa độ sẽ được áp đặt ngược lại gốc để tính đúng vị trí hình học của yếu tố j.  $\alpha_j$  là độ nhạy trung bình của phần tử j được tính ra cho RUC.

- Cập nhật hình dạng bản thu nhỏ Unit Cell: Các thuật toán cập nhật như Tiêu chí tối ưu (OC/BESO) sẽ dùng dữ liệu trung bình thu được  $\alpha_j$  này để loại bỏ các phần tử thừa (độ nhạy thấp) và giữ lại tỷ trọng của phần tử đóng vai trò chống trượt nén (độ nhạy cao), qua đó đưa ra dạng phù hợp nhất cho phần tử đặc trưng ở vòng lặp hiện tại.

Sau khi bản RUC được hoàn tất, vòng lặp lại quay trở lại bước ghép chúng thành dầm 4x1, và tiến hành tính toán lặp lại cho tới khi RUC hội tụ thành dạng hoàn chỉnh có độ cứng nhất.

### 3. Ví dụ áp dụng

Để chứng minh hiệu quả của phương pháp tối ưu hóa kết cấu có cấu trúc tuần hoàn. Một ví dụ dầm giản đơn 2D, chịu lực tập trung  $P = 1000$  N ở chính giữa được tiến hành mô phỏng (hình 2). Mẫu dầm chịu lực tập trung. Mẫu dầm được cấu tạo từ 4 cấu trúc đặc trưng, đánh số lần lượt là 1, 2, 3, 4. Giả thiết bài toán ứng suất phẳng. Mô đun đàn hồi của vật liệu được lấy bằng 204 GPa, hệ số Poisson được lấy bằng 0,29, khối lượng riêng được lấy bằng 7850kg/m<sup>3</sup>. Mỗi phần tử đặc trưng được chia thành 100x100 phần tử, tổng số phần tử của dầm là 400x100 phần tử. Thể tích của kết cấu được tối ưu được lấy bằng  $V^* = 0,5$ . Về mặt điều kiện biên, điểm nút bên dưới của ô số 1 được khống chế chuyển vị theo phương x và phương y, tương đương với gối cố định, điểm nút bên phải của ô số 4 được khống chế chuyển vị theo phương y. Bốn trường hợp được tiến hành mô phỏng:

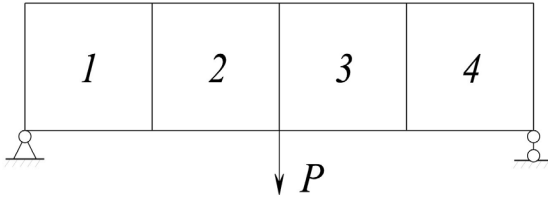
- Trường hợp 1: kết cấu được tối ưu hóa dạng nguyên khối, không có cấu trúc tuần hoàn.

- Trường hợp 2: ghép 4 cấu trúc đặc trưng cùng chiều, tịnh tiến các phần tử.

- Trường hợp 3: các cấu trúc đặc trưng được xoay theo 4 góc: 0°, 90°, 180°, 270°

- Trường hợp 4: kết cấu dạng đối xứng, ô số 2 được tạo ra bằng cách tịnh tiến ô số 1, ô số 3, 4 được tạo ra bằng cách lấy đối xứng với ô 1 và 2.

Các hình dạng tối ưu của kết cấu dầm được thể hiện trên hình 3, 4, 5, 6. Kết quả xác định độ mềm cùng với số vòng lặp tương ứng được thể hiện trên hình 7. Kết quả cho thấy rằng trường hợp 1 có độ mềm nhỏ nhất, với giá trị là 21,72, cho thấy đây là dạng tối ưu hiệu quả nhất về mặt độ cứng. Tuy nhiên dạng kết cấu này không mang tính tuần hoàn, gây khó khăn cho việc lắp đặt. Độ mềm lần



Hình 2. Sơ đồ thiết lập điều kiện biên cho dầm tuần hoàn được cấu tạo từ 4 phần tử đặc trưng

lượt của ba trường hợp 2, 3, 4 lần lượt là 32,91; 30,45; 31,04. Như vậy, trong trường hợp tối ưu hóa kết cấu dạng tuần hoàn, trường hợp 3 cho giá trị độ mềm nhỏ nhất, tương ứng với độ cứng cao nhất. Tuy nhiên, lượng vật liệu ở biên chịu kéo nhỏ, dẫn tới giảm khả năng chịu kéo của vật liệu. Trường hợp 2 có độ mềm lớn nhất, nhưng lại đảm bảo tính đều đặn về mặt thẩm mỹ.



Hình 3. Tối ưu hóa hình thái trên toàn bộ dầm



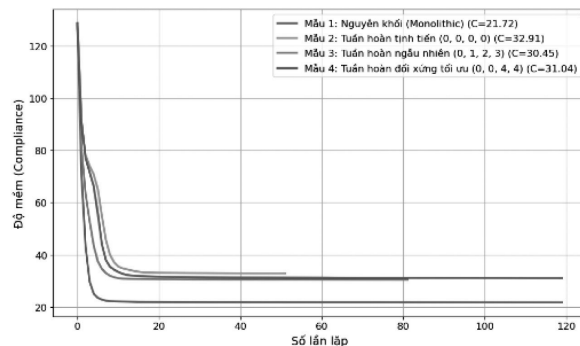
Hình 4. Tối ưu hóa hình thái ứng với trường hợp 2



Hình 5. Tối ưu hóa hình thái ứng với trường hợp 3



Hình 6. Tối ưu hóa hình thái ứng với trường hợp 4



Hình 7. Tương quan giữa độ mềm với số lần lặp của 4 trường hợp

### Kết luận

Bài báo đã trình bày phương pháp tối ưu hóa kết cấu có dạng tuần hoàn, trên cơ sở của phương pháp SIMP. Phương pháp này được áp dụng trên dầm giản đơn 2D chịu uốn ba điểm. Kết quả cho thấy rằng cấu trúc không được tối ưu hóa dạng tuần hoàn cho độ cứng lớn nhất. Tuy nhiên, nhược điểm là không tuần hoàn sẽ gây nhiều khó khăn cho sản xuất đại trà. Việc xoay hướng của các ô cơ sở sẽ đem lại hiệu quả khác nhau về mặt độ mềm. Bên cạnh đó, cấu trúc tuần hoàn có tính thẩm mỹ cao.

Nghiên cứu này mới dừng lại ở giả thiết dầm được tạo từ 4 ô cơ sở. Việc chia dầm thành các tổ hợp gồm m hàng và n cột sẽ dẫn đến số lượng lớn các hình thái tối ưu có thể tạo ra. Việc xác định được hình dạng tối ưu trong trường hợp nhiều m x n ô cơ sở sẽ là hướng nghiên cứu triển vọng tiếp theo.

### Tài liệu tham khảo

- Bendsøe, M. P., & Sigmund, O. (1999). Material interpolation schemes in topology optimization. *Archive of applied mechanics*, 69(9-10), 635-654.
- Bendsøe, M. P., & Sigmund, O. (2003). *Topology optimization: theory, methods, and applications*. Springer Science & Business Media.
- Chen, Y., Liu, X., & Wang, Y. (2010). Topology optimization of periodic structures with maximum thermal conductivity. *International Journal of Thermal Sciences*.
- Huang, X., & Xie, Y. M. (2007). Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method. *Finite elements in analysis and design*, 43(14), 1039-1049.
- Huang, X., & Xie, Y. M. (2008). Topology optimization of periodic structures using the bi-directional evolutionary structural optimization method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 36(6), 597-608.
- Huang, X., & Xie, Y. M. (2010). Evolutionary topology optimization of continuum structures: methods and applications. John Wiley & Sons.
- Osanov, M., & Guest, J. K. (2016). Topology optimization for architected materials design. *Annual Review of Materials Research*, 46.
- Sigmund, O. (2001). A 99 line topology optimization code written in Matlab. *Structural and multidisciplinary optimization*, 21(2), 120-127.
- Sigmund, O., & Maute, K. (2013). Topology optimization approaches: A comparative review. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 48(6), 1031-1055.
- Thomas, S., Li, Q., & Steven, G. (2021). Finite periodic topology optimization with oriented unit-cells. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 64(4), 1765-1779.
- Van Dijk, N. P., Maute, K., Langelaar, M., & Van Keulen, F. (2013). Level-set methods for structural topology optimization: a review. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 48(3), 437-472.
- Wu, Z., Xia, L., & Wang, S. (2021). Topology optimization of hierarchical structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.